МЕХАНИКА

Лектор: Жақыпов Әлібек Серікұлы
Тел: +7 705 660 69 63
e-mail: Alibek.Zhakypov@kaznu.edu.kz

8 лекция
«Свободные затухающие колебания»

Цель лекции: сформировать у студентов понимание свободных затухающих и вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления, ввести количественные характеристики затухания и резонанса и показать их роль в поведении реальных колебательных систем.

Задачи лекции:

1. Рассмотреть уравнение движения осциллятора с упругой силой и силой сопротивления, пропорциональной скорости, и проанализировать типы решений.
2. Показать особенности свободных затухающих колебаний и апериодического режима при разных значениях коэффициента затухания.
3. Ввести и объяснить логарифмический декремент затухания и добротность как количественные меры затухания и энергетических потерь системы.
4. Записать дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом затухания и выделить свободную и вынужденную составляющие решения.
5. Исследовать зависимость амплитуды установившихся вынужденных колебаний от частоты внешней силы и обсудить явление резонанса и его практическое значение.

Основные понятия и термины:

Свободные затухающие колебания с вязким сопротивлением – колебания системы, на которую действуют упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная скорости.

Логарифмический декремент затухания – величина, равная натуральному логарифму отношения соседних по времени значений амплитуды или отклонения системы.

Добротность колебательной системы — безразмерная величина, связанная с логарифмическим декрементом и показывающая, насколько слабо затухают колебания и насколько мала доля энергии, теряемой за период.

Вынужденные колебания – колебания системы под действием внешней периодической силы.

Резонанс – при частоте внешнего воздействия, близкой к резонансной, амплитуда достигает максимума, что называется резонансом и требует учета при проектировании технических систем.

План лекции

1 Свободные колебания с силой упругости и силой сопротивления. Уравнение движения с учетом вязкого сопротивления и его общее решение.

2 Типы режимов. Апериодическое движение и затухающие колебания при разных значениях коэффициента затухания. Поведение амплитуды во времени.

3 Логарифмический декремент затухания и добротность. Определения, физический смысл, связь с уменьшением амплитуды и диссипацией энергии.

4 Вынужденные колебания с затуханием. Дифференциальное уравнение с периодической внешней силой, общее и частное решения, установившийся режим.

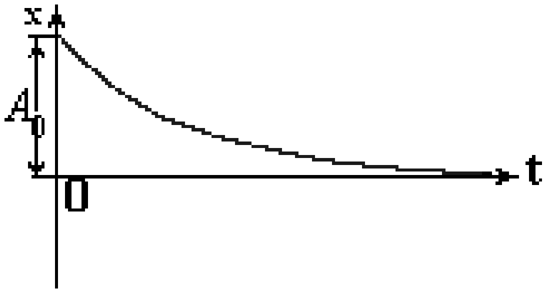
5 Амплитуда вынужденных колебаний как функция частоты внешней силы. Амплитудно частотная характеристика, резонанс, практические выводы для техники.

«Свободные затухающие колебания»

Кроме силы упругости $F = - kx$ на тело действуют также сила сопротивления, которая при медленных движениях пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{\text{сопр}} = -rV = -r(dx/dt) \tag{8.1}$$

где r - коэффициент сопротивления, с размерностью $[r]$ = кг/с.



С учетом сказанного, уравнение движения тела (2-й закон Ньютона) $ma=F$ будет иметь вид

$$m(d^2\text{x}/\text{dt}^2) \ = \ -\text{kx} - \text{r(dx/dt)} \tag{8.2}$$

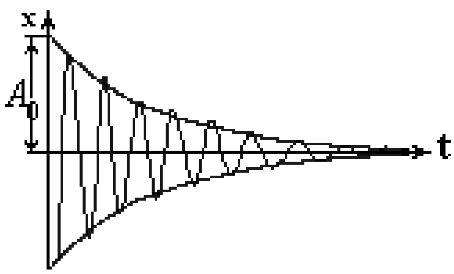
или, разделив на массу m правую и левую части такого уравнения, имеем:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{8.3}$$

где $\beta = r/2m$ - коэффициент затухания;

$[\beta] = 1/c = c^{-1}$. Его решение будет

$$x = A_0\, exp\left[\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t\right] \tag{8.4}$$



Анализируя (8.4), можно видеть, что:
1) при $\beta >> \omega_0$ $\ x = A_0\, exp(-2\beta t)$,

т.е. движение получается непериодическим, рис. 9; его называют апериодическим, т.к. тело монотонно стремится к положению равновесия.

2) при $\beta \leq \omega_0$ $x = A_0[exp(-\beta t)]\,cos(\omega t + \theta) = A(t)\,cos(\omega t + \theta)$ (8.5)

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $A(t) = A_0\,exp(-\beta t)$ - амплитуда, а

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{8.6}$$

Из (8.6) следует, что затухающие колебания не являются строго гармоническими, их амплитуда *A(t),* уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания β.

8.1. Логарифмический декремент затухания

Натуральный логарифм отношения отклонения системы в моменты времени t и $t + T$ называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\delta = ln[x(t)/x(t+T)] = ln\left[A_0 e^{-\beta t}/A_0 e^{-\beta(t+T)}\right] = \beta T = 2\pi\beta/\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 2\pi\beta/\omega. \tag{8.7}$$

Величина, обратная δ, показывает число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в *е* = 2,7182 раз.

Величина

$$Q = \pi/\delta = \pi\omega/2\pi\beta = \omega/2\beta \tag{8.8}$$

называется добротностью колебательной системы.

Заметим, что рассмотренная колебательная система является диссипативной, т.к. ее механическая энергия постепенно уменьшается с течением времени за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии.

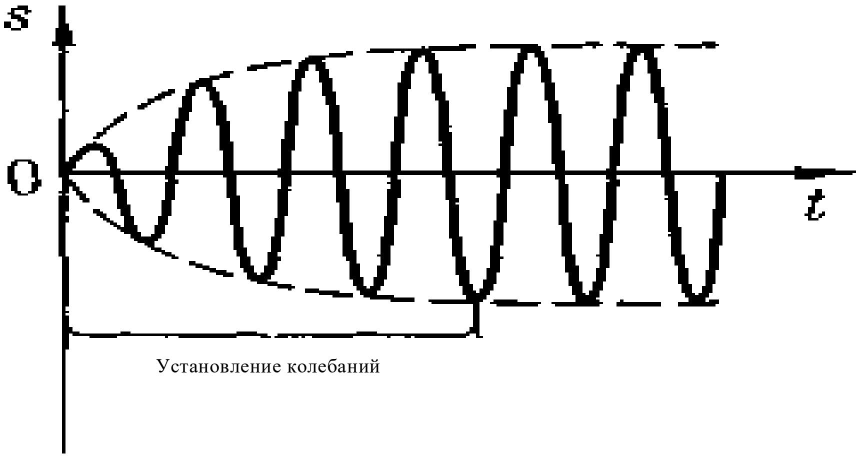
Вынужденные колебания

Они возникают при действии на систему внешней периодически изменяющейся силы (*вынуждающей силы)*

$$F = F_m\,cos\,\Omega\,t \tag{8.9}$$

где Ω - круговая частота вынуждающей силы.

в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой и являются гармоническими



Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом затухания запишется в виде:

$$m(d^2x/dt^2) = -kx - r(dx/dt) + F_m cos\Omega t \quad (8.10)$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_m/m)\, cos\,\Omega\, t \quad (8.11)$$

Таким образом, получили линейное *неоднородное* дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решением такого уравнения будет

$$x = x_0 + x_{\text{вын}} \quad (8.12)$$

где x_0 – общее решение однородного уравнения (23), (т. е. уравнения (23) с правой частью, равной нулю). Согласно (17)

$$x_0 = A_0\, exp\left[\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right) t\right] \quad (8.13)$$

и с течением времени $x_0 \to 0$. Поэтому $x \to x_{ВЫН}$.

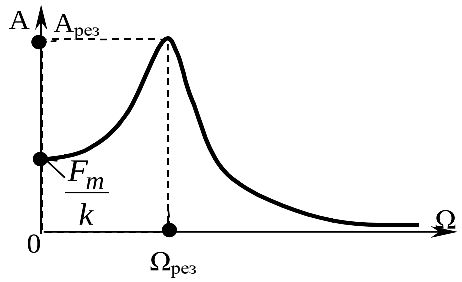
Из решения (23) следует, что

$$x_{\text{вын}} = A\, cos(\Omega t - \theta) \quad (8.14)$$

где

$$A = F_m/m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} \quad (8.15)$$

$$\theta = arctg[2\beta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)] \quad (8.16)$$



Из анализа следует, что хотя амплитуда вынуждающей силы F_m, остается постоянной, амплитуда A вынужденных колебаний зависит от частоты Ω вынуждающей силы.

Исследуя на экстремум, можно показать, что только при резонансной частоте

$$\Omega_{\text{РЕЗ}} = \sqrt{\omega_0^2 = 2\beta^2} \tag{8.17}$$

1

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимальной величины:

$$A_{\text{РЕЗ}} = F_m/2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{8.18}$$

Это явление называется резонансом.

На рис. приведена зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты Ω вынуждающей силы , которая определяется формулой (25); (откуда: при Ω =0 находим

$$A = F_m/m\omega_0^2 = F_m/k \tag{8.19}$$

а при $\Omega \to \infty$ имеем$A \to \infty$, что объясняется инерционностью колебательной системы).

Явление резонанса, состоящее в резком увеличении амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте, широко используется в технике. Его следует учитывать при конструировании машин, кораблей, самолетов и т.д. Необходимо, чтобы их резонансные частоты не совпадали с частотой вынуждающих внешних воздействий.

Контрольные вопросы

1. Запиши уравнение движения осциллятора с силой упругости и силой сопротивления, пропорциональной скорости, и поясни физический смысл коэффициента затухания.
2. Чем отличаются свободные затухающие колебания от апериодического режима какие условия на параметры определяют переход между этими режимами
3. Дай определение логарифмического декремента затухания как он связан с уменьшением амплитуды во времени и что означает величина, обратная ему
4. Что такое добротность колебательной системы какие свойства колебаний она характеризует и как связана с потерями энергии за период

5. Запиши уравнение вынужденных колебаний с затуханием и объясни, при каком отношении частоты внешней силы к собственной частоте системы возникает резонанс и как это проявляется в амплитуде установившихся колебаний

Литература

1. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.- 478 с.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высш. шк., 1989.- 608 с.
3. Савельев И.В. Общий курс физики. Т1. Механика. Молекулярная физика. М.: Наука, 1988.- 416 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.- М.: Наука, 1985.
5. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.1,2,3.-М.: Наука, 1974,1980
6. Сивухин Д.В. Курс общей Физики. – М.: Наука, 1986. Т. 1.